



Modelagem de sistemas complexos de vácuo a partir de conceitos fundamentais

Modeling complex vacuum systems from fundamental concepts

Gabriel Geidson Johanson de Sousa^{1,*} , Francisco Tadeu Degasperis^{2,3}

1. Universidade Federal do ABC – Santo André (SP), Brasil.

2. Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza – Faculdades de Tecnologia de São Paulo – Departamento de Sistemas Eletrônicos – São Paulo (SP), Brasil.

3. Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza – Programa de Mestrado Profissional em Gestão e Tecnologia em Sistemas Produtivos – São Paulo (SP), Brasil.

Autor correspondente: gabrieljohanson23@gmail.com

Editor de seção: Luciana Rossino

Recebido: 05 Jun., 2024 **Aceito:** 22 Jul., 2024

RESUMO

O estudo de sistemas de vácuo é especialmente relevante para o dimensionamento físico desses sistemas. Contudo, diversos casos apresentam complexidade devido à quantidade de componentes considerados e aos parâmetros que dependem da pressão. O presente trabalho apresenta o desenvolvimento da equação fundamental de bombeamento em vácuo para sistemas complexos de vácuo, considerando o comportamento ideal do gás. Como caso de estudo, o equacionamento foi aplicado a um sistema de vácuo real composto por duas câmaras de vácuo interligadas por meio de uma condutância, o qual é de grande interesse para a indústria de refrigeração. Como resultado, foi obtido um sistema de equações diferenciais acopladas e não lineares. A partir do equacionamento, foi desenvolvido um modelo utilizando o *software* matemático Maple™, aplicando as equações e os parâmetros de bombeamento da bomba de vácuo, além das dimensões características do sistema. Ainda, foi feita a consideração do gás, sendo bombeado no regime laminar de escoamento na faixa de vácuo grosseiro para validação do modelo. Os resultados obtidos apresentam as curvas de queda de pressão em função do tempo para cada uma das câmaras de vácuo em diversas situações, mostrando-se coerentes para os casos simulados.

PALAVRAS-CHAVE: Sistema de vácuo, Modelagem matemática, Vácuo complexo.

ABSTRACT

The study of vacuum systems is especially relevant for their physical dimensioning. However, many cases present high complexity due to the number of components considered and the parameters that depend on the pressure. This work presents the development of the fundamental vacuum pumping equation applied to complex systems considering the gas behaving ideally. As a reference case, the equation was applied to a real vacuum system composed of two vacuum chambers interconnected by a conductance, which is of great interest to the refrigeration industry. As a result, a system of coupled and nonlinear differential equations was obtained. Based on the equation, a model was developed using Maple™ mathematical software, applying the equations and the vacuum pump parameters, as well as the characteristic dimensions of the system. The gas being pumped in the laminar flow regime within the rough vacuum range was also considered for model validation. The results obtained present the pressure drop curves as a function of time for each vacuum chamber under various conditions, showing consistency with the simulated cases.

KEYWORDS: Vacuum system, Mathematical modeling, Complex vacuum.

INTRODUÇÃO

A tecnologia do vácuo está presente, direta ou indiretamente, em todas as grandes áreas da ciência e tecnologia. Exemplos mais presentes dessa influência são a indústria de microeletrônica, indústria farmacêutica, indústria aeroespacial, indústria alimentícia, entre outras. Os projetos de sistemas de vácuo são utilizados para determinar os componentes e dimensões características adequados a cada aplicação. Esses projetos envolvem, em grande parte, a modelagem do processo de bombeamento desse sistema da pressão atmosférica até sua pressão final de operação. Na modelagem física, caracteristicamente são obtidas equações diferenciais parciais que relacionam a variação da pressão com a variação da quantidade de partículas no sistema. A solução dessas equações diferenciais é a função que representa a queda de pressão nas câmaras de vácuo em função do tempo.

A modelagem dos sistemas de vácuo geralmente envolve complicações que ocorrem na transcrição de variáveis reais para variáveis numéricas. Para que seja possível a obtenção de soluções dessas equações diferenciais, diversas considerações de contorno particulares se fazem necessárias para cada tipo e objetivo de sistemas de vácuo¹. Algumas considerações feitas para todas as modelagens são o regime de escoamento no qual o sistema será bombeado, a pressão final na qual o sistema trabalhará, os gases que estarão envolvidos no processo, a temperatura de trabalho, as superfícies internas do sistema de vácuo e o padrão de vedação desse sistema de vácuo².

O presente trabalho tem como objetivo apresentar a complexidade inerente ao estudo de sistemas de vácuo. Será desenvolvida a equação fundamental para o processo de bombeamento em vácuo a partir de conceitos fundamentais em sistemas complexos a partir da consideração do gás se comportando idealmente e utilizando a equação dos gases ideais (equação de Clapeyron) como ponto de partida. A equação obtida nesse estudo será aplicável para qualquer faixa de vácuo a ser estudada.

A partir do equacionamento realizado inicialmente, será apresentada sua aplicação teórica para sistemas de vácuo grosseiro, com a inclusão das situações de contorno e equações descritivas de condutâncias e velocidade efetiva de bombeamento para esse regime em especial, considerada para esse estudo a faixa de pressão de 10^3 mbar (pressão atmosférica) a 1 mbar.

O caso de estudo em especial, a ser apresentado para aplicação do equacionamento, é de um sistema complexo de vácuo composto por duas câmaras de vácuo interligadas por meio de uma condutância e bombeadas por meio de duas outras condutâncias, uma em cada câmara. Desenvolvendo o problema, chega-se a um sistema de equações diferenciais acopladas que têm características não lineares e necessita da utilização de métodos numéricos de resolução para que se possa analisar o problema.

O sistema de vácuo estudado reflete um sistema de vácuo muito comum na indústria: o circuito de refrigeração. Considerando que o circuito de refrigeração tem um maior número de variáveis, esse sistema foi o mais explorado para qualificação do modelo. Uma vez que é necessária a realização de vácuo na etapa prévia à introdução do fluido refrigerante no circuito, torna-se justificado o estudo desses sistemas, que atualmente não têm qualquer modelo científico.

Por fim, serão apresentados os resultados obtidos a partir das simulações realizadas com um modelo desenvolvido em *software* matemático Maple™. O modelo considera o sistema de equações diferenciais obtido, os parâmetros de velocidade de bombeamento (considerando uma bomba mecânica de palhetas rotativas de duplo estágio), as dimensões características do sistema, além do regime viscoso laminar de bombeamento descrevendo o escoamento do gás.

MÉTODOS

Os sistemas de vácuo são geralmente tratados com a consideração de que o gás bombeado se comporta idealmente, ou seja, não são consideradas as interações eletromagnéticas e gravitacionais entre as partículas do gás. Embora essa hipótese não deva ser tomada como regra para o tratamento de qualquer sistema de vácuo, pode ser considerada razoável para a maioria dos casos estudados pela tecnologia do vácuo.

A adoção do modelo ideal para os gases, trabalhando na temperatura de 293 K e faixa da pressão de 1.000 a 1 mbar, é razoável, uma vez que nessas condições as interações de London – Van der Waals – são desprezíveis³.

Para análise da variação da pressão no sistema, relacionada com a variação da densidade de partículas internas ao sistema analisado, podemos utilizar as equações de estado, como a de Van der Waals, a equação do virial ou a dos gases ideais (equação de Clapeyron – Mendeleev). Considerando, então, o modelo ideal para os gases, temos que a equação de Clapeyron é válida para análise desse sistema:

$$p \cdot V = NkT = nRT \quad (1)$$

sendo p a pressão do sistema, V o volume disponível para o gás, N o número de moléculas de gás, n o número de moles de gás, R a constante universal dos gases ideais, k a constante de Boltzmann e T a temperatura do gás em K.

O sistema simples de vácuo

Para a explanação inicial do problema, consideraremos um sistema simples de pré-vácuo para a dedução da equação fundamental para o processo de bombeamento em vácuo. O sistema simples de vácuo considerado será composto por uma câmara de vácuo, uma linha de bombeamento (condutância), uma bomba de vácuo do tipo mecânica de palhetas de duplo estágio e uma válvula de ventilação (considerada ideal – volume e *throughputs* residuais desprezíveis). O resultado obtido por essa modelagem será posteriormente utilizado no tratamento dos casos complexos⁴.

Um sistema simples de vácuo pode ser representado pelo esquema expresso na Fig. 1.

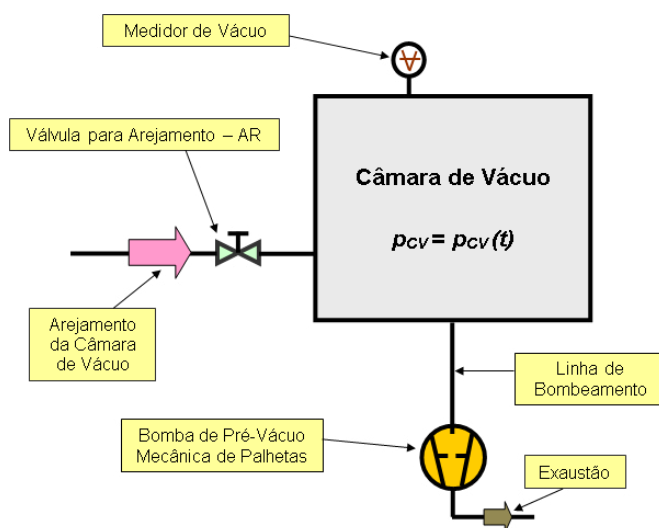


Figura 1: Sistema simples de pré-vácuo com bomba mecânica de palhetas.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Para um volume delimitado como a câmara de vácuo, podemos interpretar a variação da pressão como uma variação da densidade de partículas no volume. A partir dessa leitura, podemos derivar a equação de Clapeyron para encontrarmos uma relação para essa variação da quantidade de partículas em função do tempo:

$$\frac{d(p_{cv} \cdot V_{cv})}{dt} = \frac{d(nRT)}{dt}$$

Considerando, então, um sistema simples de vácuo no qual há apenas uma câmara de vácuo de volume V_{cv} constante, e sendo R e T também constantes, temos:

$$V_{cv} \cdot \frac{dp_{cv}}{dt} = RT \cdot \frac{dn}{dt}$$

Assim, temos a representação da variação da quantidade molar de gases $\frac{dn}{dt}$, provocando uma variação de pressão no volume V_{cv} . Tendo em vista que se trata de um sistema de vácuo, sabemos que essa variação $\frac{dn}{dt}$ representa a retirada das partículas do volume de controle realizada pela bomba de vácuo.

Na tecnologia do vácuo, para controle de fluxos de partículas, utilizamos o conceito de taxa de transferência de gás (*throughput*, em inglês), considerando-se que à medida que essa transferência está ocorrendo, a densidade de partículas no volume de controle está sendo modificada. A dimensão dessa grandeza tem unidade de $\frac{[p] \cdot [V]}{[t]}$ e comumente usamos $\frac{\text{mbar} \cdot \text{L}}{\text{s}}$, que representa o volume de gás que escoar por uma seção de condutância a uma dada pressão, e não apenas uma vazão volumétrica (velocidade de bombeamento) em unidades de $\frac{\text{L}}{\text{s}}$, como em hidrodinâmica geral.

O principal *throughput* observado é o que flui da câmara de vácuo para a bomba de vácuo. Adotando, então, a terminologia adequada, teremos a representação da seguinte forma:

$$V_{cv} \cdot \frac{dp_{cv}(t)}{dt} = (Q_{ent} - Q_{sai}) \quad (2)$$

sendo Q_{ent} o fluxo de gases que entra (alimenta a câmara de vácuo com gás) no sistema de vácuo e Q_{sai} o fluxo de gás de saída do sistema de vácuo (entra na bomba de vácuo). Assim, considerando o *throughput* Q_{ent} como residual, referente a vazamentos intrínsecos do sistema, e Q_{sai} como fluxo de saída devido ao bombeamento do sistema, teremos:

$$V_{cv} \cdot \frac{dp_{cv}(t)}{dt} = -S_{ef} \cdot p_{cv}(t) + Q_{res} \quad (3)$$

sendo Q_{res} o *throughput* residual pertinente a vazamentos intrínsecos do sistema e $S_{ef} \cdot p_{cv}(t)$ o fluxo de saída de gás pela bomba de vácuo, sendo S_{ef} a velocidade efetiva de bombeamento do sistema (intrinsecamente dependente da pressão).

Para determinação da velocidade efetiva de bombeamento S_{ef} , temos um problema um tanto mais complexo do que apenas uma variável. A velocidade de bombeamento efetiva é descrita pela seguinte equação:

$$\frac{1}{S_{ef}} = \frac{1}{S_{BV}} + \frac{1}{C} \quad (4)$$

onde S_{ef} é a velocidade efetiva de bombeamento do sistema, S_{BV} é a velocidade de bombeamento da bomba adotada e C é a condutância do sistema (representada na Fig. 1 pelo fole metálico).

A complexidade consiste no fato de que tanto a velocidade de bombeamento S_{BV} quanto a condutância, para o regime de pré-vácuo, são dependentes da pressão e que devem ser feitas suposições adequadas a cada composição desses dois parâmetros.

A Eq. diferencial 3 é denominada equação fundamental para o processo de bombeamento em vácuo. As suposições que devem ser adotadas a cada sistema, tais como velocidade de bombeamento das bombas utilizadas, condutâncias (e suas respectivas variações devido à pressão) e volumes de câmaras, devem ser aplicadas para a resolução de cada caso.

O sistema complexo de pré-vácuo

A definição de sistemas complexos não foi apresentada formalmente. Pelo menos neste trabalho, podemos definir como um sistema complexo de vácuo qualquer sistema de vácuo que apresentarmos com um grau significativo de complexidade matemática no modelo desenvolvido (como condutâncias e velocidades efetivas de bombeamento variando com a pressão, *throughputs* residuais diferentes de 0 etc.).

Um exemplo de tratamento complexo que pode ser considerado ainda no caso do sistema simples de vácuo é a consideração não linear da condutância. Se tomarmos o bombeamento ocorrendo no regime viscoso laminar, temos uma condutância de seção circular que seria a geometria mais simples utilizada e que teria seu valor calculado pela Equação 5²:

$$C \left(\frac{\text{L}}{\text{s}} \right) = 2,46 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{D^4}{\eta L} \right) \cdot pm \quad (5)$$

sendo C a condutância em $L \cdot s^{-1}$, D o diâmetro do tubo em centímetros, L o comprimento do tubo em centímetros, η a viscosidade do gás em poise e pm a pressão média entre as extremidades do tubo em mbar.

Aplicando essa expressão no termo de velocidade efetiva de bombeamento do sistema (S_{ef}) da equação fundamental para o processo de bombeamento em vácuo, teremos:

$$V_{cv} \cdot \frac{dp_{cv}(t)}{dt} = - \left(\frac{1}{\frac{1}{S_{BV}} + \frac{1}{2,46 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{D^4}{\eta L}\right) \cdot p_{cv}(t)}} \right) \cdot p_{cv}(t) + Q_{res} \quad (6)$$

A Eq. 6 já tem caráter não linear e confere ao estudo a característica de complexidade matemática⁵.

Nos sistemas complexos aqui estudados, temos casos em que consideramos não apenas uma câmara de vácuo, mas duas, em um arranjo com mais variáveis que o apresentado inicialmente. Nesse arranjo, existem diversos *throughputs* que devem ser levados em consideração e avaliados conjuntamente. Desses *throughputs*, existe um que deve ser analisado considerando-se as pressões em ambas as câmaras a cada momento, pois é proporcional à diferença de pressão entre as câmaras e à condutância de interligação entre essas.

A Fig. 2 representa o sistema complexo de vácuo aqui estudado.

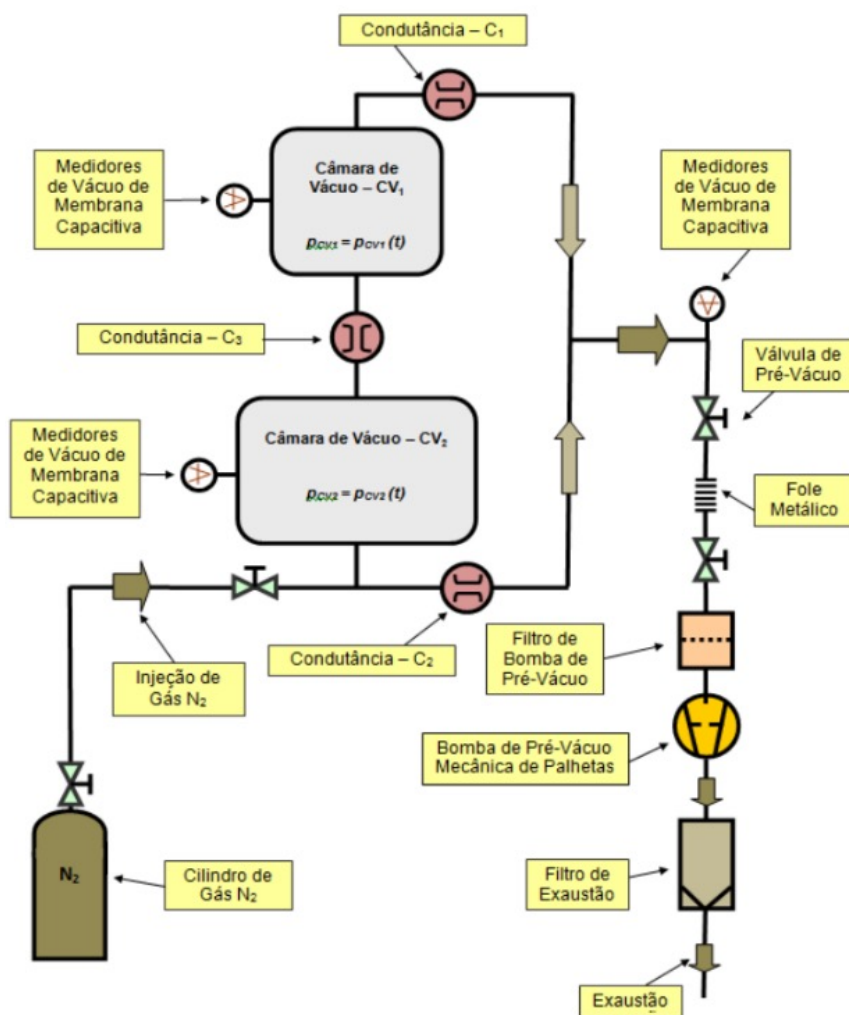


Figura 2: Esquema de um sistema complexo de vácuo com duas câmaras de vácuo interconectadas.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Sistemas dessa natureza são encontrados nas indústrias de refrigeração. O esquema da Fig. 3 refere-se à correspondência com esse sistema industrial.

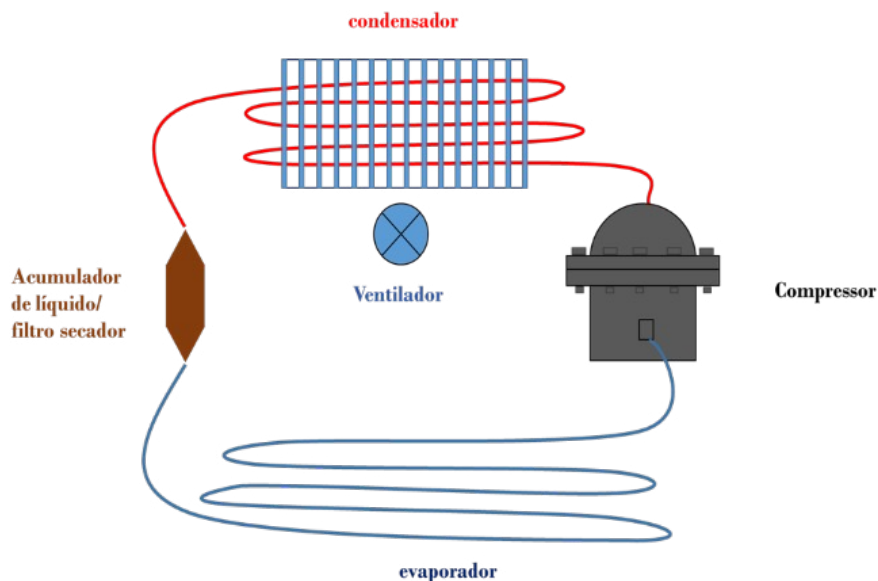


Figura 3: Esquema representativo de um circuito de um refrigerador.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Vemos que existem dois volumes a serem considerados, o do compressor do circuito, que na etapa de evacuação não está em funcionamento e podemos tratá-lo como volume $V_{cv1} = cte$, e o filtro acumulador, que embora possa ter um meio filtrante, ainda apresenta um volume considerável $V_{cv2} = cte$. A dimensão desses volumes dependerá da capacidade do circuito de refrigeração analisado. Porém, para todos os casos, o circuito encontrado tem a mesma característica.

Análise dos *throughputs* do sistema complexo de vácuo composto por duas câmaras de vácuo interconectadas

Para termos uma explanação do comportamento do sistema, vale a pena analisá-lo subdividindo-o e considerando o *throughput* pertinente a cada ponto. Assim, podemos aplicar a equação fundamental para o sistema, tendo a relação de quais são as variáveis impressas em cada termo da equação⁶.

Subdividindo o circuito, teremos os pontos em vermelho a serem analisados na Fig. 4.

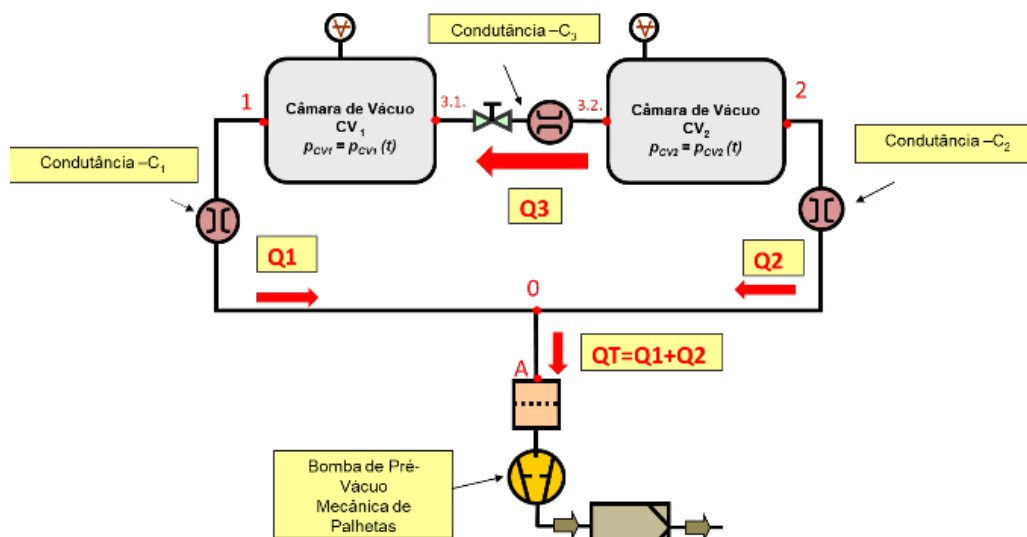


Figura 4: Sistema complexo conjugado subdividido.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Observando a Fig. 4, teremos então os pontos referentes a Q_1 , Q_2 , Q_3 e Q_T , que são os *throughputs* referentes às condutâncias C_1 , C_2 , C_3 e conexão com a bomba de pré-vácuo, respectivamente.

Analisando, então, o primeiro ponto, referente à condutância C_1 , teremos que o *throughput* nessa condutância será proporcional ao valor nominal de condutância da conexão em L/s e à diferença de pressão entre suas extremidades em unidade de pressão (usualmente mbar). Assim, podemos escrever o *throughput* Q_1 da seguinte maneira:

$$Q_1 = C_1 \cdot (p_1 - p_0) \quad (7)$$

sendo C_1 a condutância do tubo 1 em L/s, p_1 a pressão no ponto 1 (na câmara de vácuo CV_1) e p_0 a pressão no ponto 0 (na bomba de vácuo).

Tendo em vista que a todo momento, durante o bombeamento, a pressão no ponto 1 é superior ou igual à pressão no ponto 0, a todo instante o *throughput* Q_1 será maior ou igual a 0.

Analisando o segundo ponto, esse deve ser abordado de maneira análoga à análise do ponto 1. Então, teremos que o *throughput* Q_2 é dado por:

$$Q_2 = C_2 \cdot (p_2 - p_0) \quad (8)$$

sendo C_2 a condutância do tubo 2 em L/s, p_2 a pressão no ponto 2 (na câmara de vácuo CV_2) e p_0 a pressão no ponto 0 (na bomba de vácuo). Ainda, analogamente ao caso de Q_1 , para o *throughput* Q_2 , uma vez que a pressão no ponto 2 é sempre superior ou igual à pressão no ponto 0, temos que a todo instante esse termo também será maior ou igual a 0.

Analisando o *throughput* Q_3 sobre a condutância C_3 , teremos que seu valor também será proporcional à diferença de pressão entre as extremidades dessa condutância e seu valor nominal em L/s. Podemos escrever, então, o *throughput* Q_3 da seguinte forma:

$$Q_3 = C_3 \cdot (p_{3.2} - p_{3.1}) \quad (9)$$

sendo C_3 a condutância do tubo 3 em L/s, $p_{3.2}$ a pressão no ponto 3.2. (na câmara de vácuo CV_2) e $p_{3.1}$ a pressão no ponto 3.1. (na câmara de vácuo CV_1).

Para o valor modular de Q_3 , não podemos inferir qual será a todo momento, pois a diferença de pressão entre as câmaras de vácuo CV_2 e CV_1 é dependente de outras variáveis, que são seus próprios volumes e os valores nominais das condutâncias C_1 e C_2 . Esses últimos terão relação direta com a velocidade efetiva de bombeamento das câmaras de vácuo CV_1 e CV_2 , respectivamente. Assim, devemos analisar o termo Q_3 sempre levando em consideração o referencial adotado para a equação que incluirá esse termo.

O Q_T é o *throughput* total que é equivalente à soma dos *throughputs* Q_1 e Q_2 . Entretanto, o que deve ser destacado aqui, em termos práticos, é que os *throughputs* Q_1 e Q_2 são dependentes da velocidade de bombeamento da bomba de pré-vácuo. Ou seja, não é o *throughput* Q_T que é dependente de Q_1 e Q_2 , mas o contrário: Q_1 e Q_2 são dependentes da capacidade de bombeamento da bomba à qual está relacionado o Q_T . A análise das velocidades efetivas de bombeamento do sistema será feita após o equacionamento do sistema, com objetivo de analisar o sistema a partir de referenciais.

O equacionamento do problema

Analisando o problema, notamos que para a evacuação do sistema podemos proceder de duas maneiras: a primeira, abrindo o sistema e conectando o sistema de bombeamento em uma das extremidades e selando a outra; a segunda, abrindo o sistema e conectando sistemas de bombeamento nas duas extremidades.

Na primeira maneira, teríamos um dos volumes sendo bombeado pelo outro, o que o caracterizaria como uma espécie de vazamento virtual. Nesse caso, a condutância que interliga os dois volumes seria um fator limitante para o processo de bombeamento. Sabendo que essas condutâncias nos sistemas de refrigeração reais são os próprios capilares dos sistemas de refrigeração, teríamos um processo de bombeamento limitado por tal condutância. Na segunda maneira, teríamos um processo de bombeamento mais rápido e eficaz; esse sistema seria expresso, então, pelo sistema complexo de vácuo representado na Fig. 2.

Para descrever matematicamente o processo de bombeamento para os sistemas complexos de vácuo, apenas uma equação seria insuficiente, uma vez que o fenômeno de bombeamento para cada câmara é particular, embora dependentes entre si devido à condutância C_3 . Assim, apresentamos uma equação para cada câmara individualmente a partir da equação fundamental para o processo de bombeamento em vácuo.

Partindo, então, da Eq. 2, temos que os *throughputs* para cada câmara serão referentes ao bombeamento direto realizado pela conexão com a bomba de vácuo, sendo proporcional a $S_{ef} \cdot p_{cv}(t)$ e o bombeamento pela outra câmara de vácuo. Esse último *throughput* ocorrerá da câmara que estiver com maior pressão em direção à que estiver com menor pressão. O termo referente a esse fluxo será proporcional à condutância C_3 e à diferença de pressão entre as câmaras 1 e 2. Assim, as equações podem ser descritas da seguinte maneira:

Equação para descrição do processo de bombeamento na câmara de vácuo 1:

$$V_{cv1} \cdot \frac{d}{dt} p_{cv1}(t) = -S_{ef1} \cdot p_{cv1}(t) + C_3 \cdot (p_{cv2}(t) - p_{cv1}(t)) + Q_{res1} \quad (10)$$

onde V_{cv1} é o volume da câmara de vácuo 1, $P_{cv1}(t)$ é a pressão na câmara de vácuo 1 em função do tempo, S_{ef1} é a velocidade efetiva de bombeamento referente à condutância C_1 , $P_{cv2}(t)$ é a pressão na câmara de vácuo 2 em função do tempo e Q_{res1} é o *throughput* residual na câmara de vácuo 1.

Analogamente, a equação para descrição do processo de bombeamento na câmara de vácuo 2:

$$V_{cv2} \cdot \frac{d}{dt} p_{cv2}(t) = -S_{ef2} \cdot p_{cv2}(t) + C_3 \cdot (p_{cv1}(t) - p_{cv2}(t)) + Q_{res2} \quad (11)$$

onde V_{cv2} é o volume da câmara de vácuo 2, $P_{cv2}(t)$ é a pressão na câmara de vácuo 2 em função do tempo, S_{ef2} é a velocidade efetiva de bombeamento referente à condutância C_2 , $P_{cv1}(t)$ é a pressão na câmara de vácuo 1 em função do tempo e Q_{res2} é o *throughput* residual na câmara de vácuo 2.

Vemos que a equação para descrição do processo de bombeamento para câmara de vácuo 1 inclui um termo referente ao processo de bombeamento na câmara 2 e *vice-versa*. Assim, a resolução de uma das equações depende intrinsecamente da resolução da outra. Com isso não podemos separar as equações e resolvê-las individualmente ou analiticamente. Temos aqui um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, sendo fortemente não linear (visto que os termos S_{ef} , C_1 , C_2 e C_3 dependem da pressão).

Cabe mencionar que o equacionamento realizado para o caso complexo anterior é válido para qualquer faixa de pressão que venhamos a estudar, desde o vácuo grosseiro até o extremo alto vácuo. Para as diferentes faixas de pressão, cabe aplicar as condições de contorno características a cada uma, o que levará a expressões díspares entre si e cuja resolução apresentará mais propriamente o fenômeno de bombeamento para o caso em estudo.

Para resolução do sistema de equações diferenciais acopladas apresentado, não existe qualquer método de resolução analítico ao qual possamos recorrer, de forma que devemos lançar mão de métodos analíticos para analisá-lo. A resolução do sistema necessita, ainda, de um valor de contorno para qualquer método numérico adotado, a partir do qual a convergência numérica é alcançada. O valor inicial para esse sistema deve ser a pressão de partida do bombeamento, sendo essa, então, a pressão atmosférica. Assim:

$$\begin{aligned} p_{cv1}(0) &= p_{01} \\ p_{cv2}(0) &= p_{02} \end{aligned}$$

Em termos práticos, são aplicadas as condições iniciais de pressão imediatamente anteriores ao início do bombeamento. A resolução numérica do sistema apresentará as curvas de pressão para cada uma das câmaras de vácuo em função do tempo.

Análise das velocidades efetivas de bombeamento do sistema

Analisando o sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas apresentado no tópico anterior, temos os termos relativos às velocidades efetivas de bombeamento S_{ef1} e S_{ef2} relativas às condutâncias C_1 e C_2 , respectivamente.

Sabemos que a velocidade efetiva de cada um dos pontos é intrinsecamente dependente da velocidade de bombeamento da bomba de vácuo e dos valores nominais das condutâncias C_1 e C_2 . A equação que apresenta essa relação é escrita a seguir:

$$S_{ef} = \frac{C_{total} \cdot SBV}{C_{total} + SBV} \quad (12)$$

Como podemos observar, esse termo em específico já não é linear em sua natureza, uma vez que os parâmetros de dependência são variáveis no tempo (C_{total} e S_{BV} variam devido à pressão que, por sua vez, varia no tempo).

A equação apresentada é relativa ao cálculo da velocidade de bombeamento para um sistema simples que tenha apenas uma condutância em série com uma bomba. Entretanto, o nosso sistema tem uma bomba em contato com as duas condutâncias, C_1 e C_2 das linhas de bombeamento das câmaras 1 e 2, respectivamente. Consequentemente, a velocidade de bombeamento da bomba para cada uma das condutâncias não é a velocidade de bombeamento total da bomba utilizada, mas uma parcela dessa. A Fig. 5 representa a ideia.

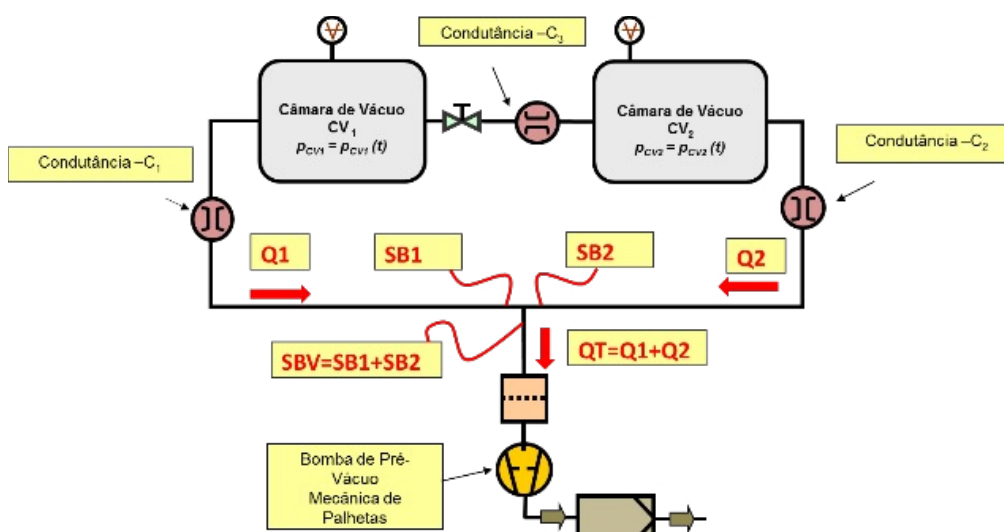


Figura 5: Arranjo representando os pontos nos quais são consideradas as velocidades de bombeamento parciais – SB1 e SB2 – para cada linha de bombeamento, totalizando a velocidade de bombeamento total $SBV = SB1 + SB2$.

Fonte: Elaborada pelos autores.

As parcelas da velocidade de bombeamento SB1 e SB2 estarão associadas aos valores nominais das condutâncias de cada linha de bombeamento. Isso ocorre porque estamos considerando a chegada do gás ao ponto de bombeamento. Sabendo que a bomba de vácuo bombeia uma quantidade delimitada de gás e que as condutâncias estão diretamente relacionadas com a facilidade que o gás terá para ser conduzido até o ponto de bombeamento, podemos deduzir que para a condutância que oferece maior facilidade de condução para o gás está associada a maior parcela da velocidade de bombeamento da bomba de vácuo. Logo, para a condutância que oferece menor facilidade de condução para o gás está associada a menor parcela de bombeamento dessa mesma bomba de vácuo. As equações que descrevem as proporções da velocidade de bombeamento referentes às condutâncias C_1 e C_2 estão expressas a seguir:

$$SBV = SB1 + SB2 \quad (13)$$

Para a condutância C_1 :

$$SB1 = SBV \cdot \frac{C1}{C1 + C2} \quad (14)$$

Para a condutância C_2 :

$$SB2 = SBV \cdot \frac{C2}{C1 + C2} \quad (15)$$

sendo S_{BV} a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo em $L \cdot s^{-1}$, C_1 a condutância da linha de bombeamento da câmara de vácuo 1 em $L \cdot s^{-1}$ e C_2 a condutância da linha de bombeamento da câmara de vácuo 2 em $L \cdot s^{-1}$.

Encontrada a expressão que representa a velocidade de bombeamento para cada condutância em si, ainda cabe encontrar as velocidades efetivas de bombeamento S_{ef1} e S_{ef2} . Para isso, basta substituir os valores encontrados de S_{BV} para as condutâncias 1 e 2 na Eq. 12.

Para S_{ef1} , temos:

$$S_{ef1} = \frac{C_1 \cdot SB1}{C_1 + SB1} \quad (16)$$

Para S_{ef2} , temos:

$$S_{ef2} = \frac{C_2 \cdot SB2}{C_2 + SB2} \quad (17)$$

Vemos, então, que as velocidades efetivas de bombeamento dependerão não apenas da condutância que se analisa e da velocidade de bombeamento da bomba de vácuo, mas da condutância oposta. Desse modo, a porção da vazão que utilizamos do poder de vazão da bomba de vácuo depende intrinsecamente da relação entre as condutâncias ao longo do tempo. Todos esses fatores adicionam novos níveis de complexidade matemática e conferem ao estudo temas de não linearidade distintos.

Sobre a resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas

Os *softwares* matemáticos que têm sub-rotinas para resolução de problemas dessa natureza apresentam, em geral, a opção de vários métodos para aplicação e convergência de solução, os quais devem ser escolhidos com coerência para que não apenas apresente-se uma convergência, mas que essa faça sentido quando refletirmos os resultados para um sistema físico. Os métodos mais comuns empregados na maioria dos *softwares* são:

Método de Runge-Kutta de quarta e sexta ordens, com adaptação na divisão dos intervalos de convergência (*adaptive rk45*);

Método de diferenciação regressiva;

Método baseado na forma quadrática de Radau (Radau algorithm);

Há, entretanto, algoritmos mais modernos para os mesmos objetivos. Cada problema pode ser mais bem resolvido por um dos métodos disponíveis (com menor erro de truncamento). Os métodos são divididos em mais apropriados para sistemas rígidos e outros para sistemas não rígidos. A rigidez do sistema está associada com a necessidade de um passo de integração maior ou menor para a resolução desse. Porém, se o método numérico for obrigado a usar passos de integração muito pequenos em relação à suavidade da solução do problema no intervalo em questão, o problema é classificado como rígido⁷. É importante frisar que, para qualquer método adotado, a partir da convergência da solução para o sistema, temos que analisar se essa faz sentido para a situação analisada. Nem sempre uma solução que está de acordo com as teorias matemáticas está de acordo com as teorias físicas. Cabe ao pesquisador analisar e julgar a resposta para o seu caso.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Aplicação do equacionamento do sistema de vácuo de duas câmaras acopladas na faixa de vácuo grosseiro

Para a principal aplicação do caso de estudo do sistema com duas câmaras de vácuo interligadas temos que a faixa de pressão de bombeamento será a do vácuo grosseiro, considerado aqui de 1.000 a 1 mbar.

Para a resolução do sistema para o vácuo grosseiro serão necessárias algumas considerações adicionais possíveis de se reproduzirem na prática de maneira razoável. Adotaremos que o fluido bombeado será o nitrogênio gasoso ultrapuro e que o regime de bombeamento será o viscoso laminar, fazendo valer a Eq. 5 como a definição de

condutância para C_1 , C_2 e C_3 . Finalmente, consideraremos, também, a velocidade de bombeamento da bomba de vácuo constante devido à pressão e ao tempo (o que é razoável, considerando uma bomba mecânica de palhetas rotativas de duplo estágio, como pode ser observado em catálogos de fabricantes para a faixa de pressão de 1.000 a 1 mbar).

As expressões desenvolvidas e representadas pelas Equações 10 e 11 são válidas para qualquer faixa de pressão. Cabe aplicarmos cada um dos termos para a faixa de pressão e para o regime de bombeamento que gostaríamos de analisar, aplicando as considerações feitas anteriormente nessas equações.

Para uma análise mais objetiva, tomaremos a equação referente aos *throughputs* em uma das câmaras de vácuo e as observações relacionadas serão expandidas para o seu par. Tomaremos a câmara de vácuo 1 como referência e extrapolaremos as implicações para a câmara de vácuo 2.

Uma vez adotada a câmara de vácuo 1 para análise, temos que a Eq. 10 será a nossa base de estudo. Para a faixa de pressão mencionada, considerando vedações do tipo KF para todo o sistema, podemos considerar os *throughputs* residuais desprezíveis. Assim, a equação de estudo torna-se:

$$V_{cv1} \cdot \frac{d}{dt} p_{cv1}(t) = -S_{ef1} \cdot p_{cv1}(t) + C3 \cdot (p_{cv2}(t) - p_{cv1}(t)) \quad (18)$$

Analogamente, para a câmara de vácuo 2, temos:

$$V_{cv2} \cdot \frac{d}{dt} p_{cv2}(t) = -S_{ef2} \cdot p_{cv2}(t) + C3 \cdot (p_{cv1}(t) - p_{cv2}(t)) \quad (19)$$

Para a Eq. 18, ao lado esquerdo da igualdade, temos a representação do fluxo total sobre o volume $V1$. Como na prática esse volume é constante, esse termo da igualdade já está definido de maneira própria, uma vez que a derivada é justamente o que gostaríamos de encontrar.

Observando ao lado direito da igualdade na Eq. 18, temos o primeiro termo $[-S_{ef1} \cdot p_{cv1}(t)]$ referente ao fluxo de gás de saída desse volume. O segundo termo do lado direito $(C3 \cdot (p_{cv2}(t) - p_{cv1}(t)))$ representa o fluxo de entrada de gás nesse volume, o que pode ser negativo, ou seja, pode ser um fluxo adicional de saída de gás, dependendo da diferença de pressão pontual entre as câmaras de vácuo.

Considerando uma análise do primeiro termo, temos que S_{ef1} é definido por uma combinação de fatores, conforme explanado para a Eq. 16. Como vimos para o pré-vácuo, esse termo é dependente das condutâncias C_1 e C_2 . Cabe definir as equações de C_1 e C_2 para entendimento dos termos. Como são condutâncias análogas, podemos representar a referência variável x e considerar $x = 1$ para C_1 e $x = 2$ para C_2 .

Definindo a condutância C_x :

$$C_x \left(\frac{L}{s} \right) = 2,46 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{D_x^4}{\eta L_x} \right) \cdot \frac{p_{cvx}(t)}{2} \quad (20)$$

sendo C_x a condutância x em $L \cdot s^{-1}$, D_x o diâmetro do tubo x em centímetros, L_x o comprimento do tubo x em centímetros, η a viscosidade do gás em poise e p_{cvx} a pressão na câmara de vácuo x em mbar.

A partir dessa definição, temos todos os elementos para posteriormente substituímos na equação para o primeiro termo à direita da Equação 18. Definido, então, o primeiro termo, basta definirmos o segundo termo, descrevendo C_3 devido às variáveis. Definindo a condutância C_3 :

$$C_3 \left(\frac{L}{s} \right) = 2,46 \cdot 10^{-2} \cdot \left(\frac{D_3^4}{\eta L_3} \right) \cdot \left(\frac{(p_{cv1}(t) + p_{cv2}(t))}{2} \right) \quad (21)$$

sendo C_3 a condutância x em $L \cdot s^{-1}$, D_3 o diâmetro do tubo 3 em centímetros, L_3 o comprimento do tubo 3 em centímetros, η a viscosidade do gás em poise e p_{cvx} a pressão na câmara de vácuo x em mbar.

Para termos, então, a Eq. 18 em função de variáveis fundamentais, basta substituir as condutâncias e velocidades de bombeamento relativas encontradas nas Equações 16, 20 e 21.

$$V_{cv1} \cdot \frac{d}{dt} p_{cv1}(t) = - \left(\frac{C_1 \cdot SB1}{C_1 + SB1} \right) \cdot p_{cv1}(t) + C3 \cdot (p_{cv2}(t) - p_{cv1}(t)) \quad (22)$$

Analogamente, para a câmara de vácuo 2, utilizando as Equações 17, 20 e 21, temos:

$$V_{cv2} \cdot \frac{d}{dt} p_{cv2}(t) = - \left(\frac{C_2 \cdot SB2}{C_2 + SB2} \right) \cdot p_{cv2}(t) + C3 \cdot (p_{cv1}(t) - p_{cv2}(t)) \quad (23)$$

De posse das Equações 22 e 23, podemos definir as variáveis fundamentais e as condições iniciais de contorno para resolvermos um caso particular. Adotemos, então, os seguintes valores para as variáveis:

$SBV = 2,5 \text{ L/s}$	$\eta_{N_2} = 1,829 \cdot 10^{-4} \text{ poises}$	
$p_{cv1}(0) = 1000 \text{ mbar}$	$p_{cv2}(0) = 1000 \text{ mbar}$	
$V_{cv1} = 30 \text{ L}$	$V_{cv2} = 150 \text{ L}$	
$Co_1 = 1 \text{ cm}$	$Co_2 = 1 \text{ cm}$	$Co_3 = 1000 \text{ cm}$
$D_1 = 2 \text{ cm}$	$D_2 = 2 \text{ cm}$	$D_3 = 0,004 \text{ cm}$

Aplicando esses parâmetros e resolvendo o sistema de equações diferenciais acopladas a partir do método de Runge-Kutta de quarta ordem pelo *software* Maple 15, chegamos à curva de pressão representada pelo gráfico da Fig. 6.

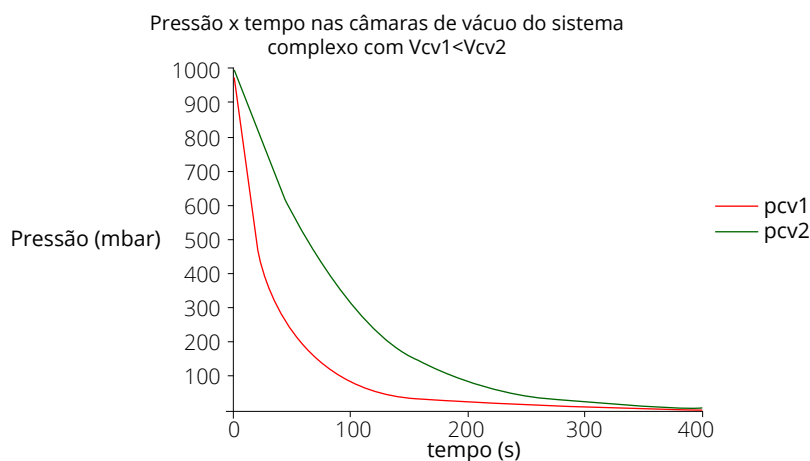


Figura 6: Pressão em função do tempo no modelo Maple para o caso assimétrico.

Fonte: Elaborada pelos autores.

O primeiro ponto a ser analisado é que, embora tenhamos declarado todos os termos de maneira explícita, ou seja, com todas as variáveis fundamentais, o modelo numérico ainda converge para uma solução. As curvas de pressão observadas têm caráter comportamental previsto na literatura para sistemas de vácuo simples, com queda de pressão exponencial para ambas as câmaras de vácuo.

Uma vez analisada a convergência do sistema, temos que a hipótese de resolução matemática está satisfeita. Contudo, ao se tratar de sistemas físicos, devemos, além do caráter matemático, analisar a coerência que os números trazem. Para o caso em questão, a declaração das variáveis de forma assimétrica foi proposital. Com essa declaração, temos que a pressão na câmara de vácuo 1, por advento de uma condutância C_1 maior (resultado de diâmetro D_1 maior e comprimento L_1 menor), deveria ter uma queda mais rápida se comparada à pressão na câmara de vácuo 2.

Os resultados apresentados mostram-se consistentes com o que eventualmente se observaria na prática, indicando que o equacionamento do sistema complexo de duas câmaras de vácuo pode ser uma alternativa para estudar sistemas com características similares, buscando seu aprimoramento.

CONCLUSÃO

À luz dos resultados obtidos, podemos afirmar que é possível descrever o fenômeno físico de bombeamento para um sistema de duas câmaras de vácuo conectadas a partir de conceitos fundamentais. O desenvolvimento do problema, a partir da consideração de utilização de gases ideais, leva a um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas, o qual não tem resolução analítica.

A resolução de um caso particular adotando variáveis reproduzíveis em laboratório demonstra que o método numérico de resolução pode ser uma estratégia viável para o estudo de casos mais complexos. Além disso, a coerência indicada pelas curvas obtidas e pelo comportamento do sistema corrobora a hipótese de que o equacionamento desenvolvido efetivamente descreve o fenômeno físico intrínseco do sistema em questão.

Com o sistema de equações diferenciais apresentado, pode ocorrer a generalização para várias câmaras de vácuo acopladas entre si, certamente aumentando a complexidade matemática do problema físico relativo ao sistema de vácuo, que pode ser considerado complexo. O resultado foi obtido a partir de primeiros princípios, adotando a abordagem termodinâmica – conservação da massa de gás desenvolvida no sistema de vácuo complexo –, levando-se em conta as grandezas termodinâmicas (grandezas físicas macroscópicas). Com o equacionamento obtido – sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares acopladas –, temos uma ferramenta de trabalho de alcance bastante geral que pode ser aplicada a todos os intervalos de pressão ou a todos os regimes de transporte de gases em sistemas de vácuo. Em trabalhos futuros, serão comparados os resultados teóricos da modelagem física do sistema de vácuo complexo com os resultados experimentais.

CONFLITO DE INTERESSE

Os autores declaram que não há conflitos de interesse.

CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Contextualização: Degasperi FT; **Metodologia:** Sousa GGJ e Degasperi FT; **Pesquisa:** Sousa GGJ e Degasperi FT; **Recursos:** Degasperi FT; **Supervisão:** Degasperi FT e Sousa GGJ; **Redação:** Sousa GGJ e Degasperi FT; **Aprovação Final:** Sousa GGJ e Degasperi FT.

DISPONIBILIDADE DOS DADOS DE PESQUISA

Todos os conjuntos de dados foram gerados ou analisados no estudo atual.

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FATEC-SP pelo apoio a este trabalho.

REFERÊNCIAS

1. Degasperi FT. Contribuições para análise, cálculo e modelagem de sistemas de vácuo (tese de doutorado). Campinas: Universidade Estadual de Campinas; 2006. <https://doi.org/10.47749/T/UNICAMP.2006.399705>
2. O'Hanlon JF. A user's guide to vacuum technology. 4. ed. New York: Wiley, 2023.
3. Degasperi FT. Modelagem e análise detalhadas de sistemas de vácuo (dissertação de mestrado). Campinas: Universidade Estadual de Campinas; 2002.

4. Degasperi FT. Equação fundamental do processo de bombeamento em vácuo. Boletim Técnico da Faculdade de Tecnologia de São Paulo 2016;41(1):19-24. [acesso em 10 Mar 2024] Disponível em: <http://bt.fatecsp.br/media/bulletins/bt41v1.pdf>
5. Pessanha JEO, Portugal C, Paz AA. Técnicas de solução de sistemas de equações diferenciais e algébricas: aplicação em sistemas de energia elétrica. Revista Controle & Automação 2005;16(1):359-72. <https://doi.org/10.1590/S0103-17592005000300008>
6. Sousa GGJ. Análise, modelagem e medição de sistemas complexos de pré-vácuo bombeados no regime viscoso laminar de escoamento (trabalho de conclusão de curso). São Paulo: Faculdade de Tecnologia de São Paulo; 2016.
7. Jardim JL. Utilização de ferramentas de simulação dinâmica de longa duração na análise de fenômenos de colapso de tensão e no treinamento de operadores. In: XIV Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (SNPTEE). Belém: Furnas Centrais Elétricas S.A.; 1997.