Revista Brasileira de Aplicações de Vácuo, v. 25, n. 4, 189-192, 2006.

MEDIDA DO MOMENTO DE INÉRCIA DE UM PÊNDULO DE TORÇÃO PARA ESTUDO DE RELAXAÇÕES ANELÁSTICAS

C.A.F. Pintão[1*]; L.H. de Almeida[2]; C.R. Grandini[2]
[1] UNESP, Faculdade de Ciências, Departamento de Física, 17033-360, Bauru, SP
[2] UNESP, Grupo de Relaxações Anelásticas, 17033-360, Bauru, SP

Recebido: 25 de julho, 2006; Revisado: 09 de outubro, 2006

Palavras-chave: Momento de Inércia, Pêndulo de torção, Módulo de elasticidade a torção.

RESUMO

Este trabalho estuda como varia o momento de inércia de um pêndulo de torção (I), cuja aplicação está direcionada ao estudo de relaxações anelásticas em materiais metálicos, cerâmicos e biomaterial. Muda-se a massa e/ou posição das massas em relação ao eixo de rotação para obter a variação do momento de inércia e determina-se seu valor pela medição de uma corrente elétrica associada à aceleração angular do referido pêndulo de torção. Os ensaios experimentais geram curvas do valor do momento de inércia em função das massas adicionadas ou das posições dessas massas que permitem optar pela melhor configuração do pêndulo para medições do atrito interno e da freqüência de oscilação (f) que permitem obter, por fim, o valor do módulo de elasticidade a torção (G) de um dado material.*

ABSTRACT

This paper studies how vary the moment of inertia of a pendulum of torsion (I) intend to be applied to the measurement of parameters associated to anelastic relaxation of metallic, ceramic and biomaterial specimens. The pendulum mass and its positions relative to rotation axis are varied resulting different values of the moment of inertia that are measured by measurement of an electric current related to the angular acceleration. Experimental curves as moment of inertia versus masses or geometrical parameters show the best arrangement of masses to be used in the measurement of internal friction and the frequency of oscillation (f) and the elastic torsion modulus (G) of a given material.*

1. INTRODUÇÃO

No estudo dos materiais através de um pêndulo de torção [1], é muito freqüente o estudo sistemático do atrito interno e freqüência de oscilação em função da temperatura. Outra grandeza que pode ser avaliada desses estudos é a variação do módulo de elasticidade a torção (G), no entanto a dificuldade em se determinar o seu valor encontra-se no fato da sua dependência em relação a outras grandezas do sistema de medida, em especial ao momento de inércia (I). A equação que relaciona a freqüência de oscilação (f^*) com G pode ser expressa como $f^* = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi G d^4}{32 l I}}$, onde d e l são o diâmetro e comprimento da amostra, respectivamente. Neste trabalho estuda-se a determinação do momento de inércia deste equipamento com a variação da massa M_i e X/L, ver Fig. 1. Para isso utilizou-se um método de medição descrito por Pintão et al [2,3], que utiliza medição de uma dada corrente elétrica associada à aceleração angular do pêndulo em oscilação [2,3].

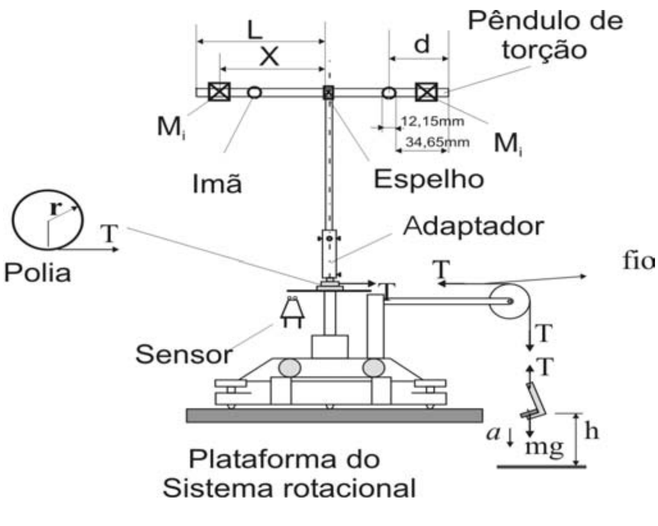

Figura 1 - Esboço do pêndulo de torção acoplado ao sistema rotacional.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

O sistema de medição e a metodologias empregados neste trabalho são semelhantes ao apresentado nas referências [2,3]. A diferença em relação ao sistema dos artigos citados é que foi construído um adaptador preso ao eixo de rotação que fixa o pêndulo de torção de forma estável quando este gira.

* fonzar@fc.unesp.br

2.1. MEDINDO A ACELERAÇÃO ANGULAR (α) E O TORQUE DA FORÇA DE TRAÇÃO (τ_T)

A aceleração angular pode ser medida indiretamente usando o método Fleming e Clinton [4]. Como mostra a Fig 2a, o capacitor é carregado quando a chave, S, está em contato com o terminal p. Uma vez que ele está carregado, quando S está em contato com q através do medidor de corrente DC, M, o capacitor, será descarregado.
A freqüência de comutação, *f*, pode ser escrita como:

$$f = \frac{i}{CV} \tag{1}$$

onde: *i* é a corrente registrada em M, *V* é a voltagem aplicada ao capacitor de capacitância *C*.
O elemento primordial nesta montagem é a chave, S, ou seja, um dispositivo que modifica periodicamente o circuito, carregando e descarregando o capacitor. Portanto, se for montado S no eixo de rotação, a freqüência descrita pela equação (1) pode ser relacionada à velocidade angular, ω, do pêndulo. Para este propósito, um disco compacto (CD) foi acoplado ao eixo e dividido em 24 seções igualmente espaçadas, doze foram cobertas com uma folha de papel opaco, tal que o CD tem, alternadamente, superfícies espelhadas e opacas quando ele gira.
Em seguida, monta-se um sensor opto-eletrônico (emissor e receptor de radiação infravermelho), faceando a superfície do disco (Fig. 1), capaz de reconhecer através da reflexão do feixe infravermelho a natureza da superfície que está passando diante dele
Usando um circuito integrado CI 4069, como ilustrado na Fig. 2b, o nível lógico 0 foi associado à superfície opaca e o nível 1 a espelhada. Estes níveis (pulsos quadrados) irão comandar uma chave analógica CMOS comutadora (CI4066), que fará o papel da chave S na Fig. 2a, dando início ao processo de carga e descarga do capacitor. A freqüência de rotação do pêndulo, neste caso, é 1/12 da freqüência de comutação f. Logo, a velocidade angular ω do pêndulo pode ser escrita como $\omega = \frac{\pi f}{6}$, que combinada com a equação (1), resulta:

$$\omega = \frac{\pi}{6CV} i \tag{2}$$

Vemos, portanto, que a velocidade angular do pêndulo pode ser obtida diretamente a partir de uma leitura de corrente elétrica no medidor M.
A aceleração angular, α, pode ser determinada pela equação de Torricelli para o movimento circular uniformemente acelerado a qual pode ser expressa como:

$$\omega^2 = 2\alpha\Delta\theta \tag{3}$$

onde $\Delta\theta$ representa a variação angular do sistema e está relacionada com a altura de queda h pela expressão: $h = r\Delta\theta$, onde r é o raio da polia. Esta última equação pode ser combinada com a equação (2) para obter:

$$\alpha = k i^2 \tag{4}$$

onde $k = \frac{r\pi^2}{72h(CV)^2}$ é uma constante conhecida, uma vez que *r*, *h*, *C e V* são parâmetros previamente conhecidos.
A força resultante sobre o corpo é $T = m(g - \alpha r)$, onde T representa a força de tração aplicada pelo fio na polia do sistema rotacional, m é a massa de tração, g é a aceleração da gravidade (g=9,79m/s^2). Definindo-se τ_T como:

$$\tau_T = mgr - mk(r)^2(i)^2 \tag{5}$$

Assim, conhecendo-se as constantes nas equações (4) e (5) pode-se determinar tanto a aceleração angular como o torque, a partir de uma leitura de corrente.

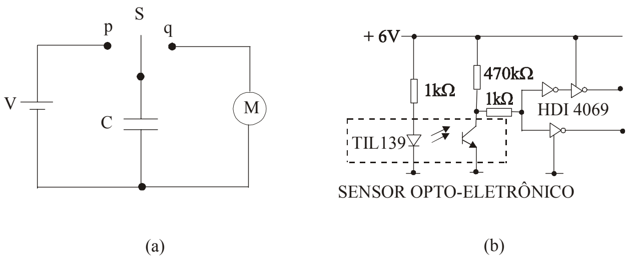

Figura 2 - (a) Circuito para medida da freqüência; (b) Diagrama da montagem do sensor opto-eletrônico.

Variando a massa m obtém-se um sistema de valores para τ_T e α que serão usados, conforme será exposto a seguir, para determinar a inércia do pêndulo.

2.2. MEDINDO O MOMENTO DE INÉRCIA DO PÊNDULO DE TORÇÃO (*I*)

O arranjo usado para determinar o momento de inércia é mostrado na figura 1. O pêndulo de torção é preso através de um adaptador fixado ao eixo do sistema rotacional. Concentricamente fixado ao eixo está uma polia de pequeno diâmetro com um fio enrolado em volta dela. Uma massa m é conectada a outra extremidade do fio e inicialmente mantida a uma distância, h, do chão.
Sabe-se que o torque resultante, τ, é responsável pelo movimento de rotação do eixo do sistema rotacional (sem ou com o pêndulo), e pode ser expresso como:

$$\tau = \tau_T - \tau_{ATRITO} = I_{EIXO}\ \alpha_0 \tag{6}$$

ou

$$\tau = \tau_T - \tau_{ATRITO} = I_{EIXO+PÊNDULO}\ \alpha \tag{7}$$

onde τ_{ATRITO} é o torque da força de atrito que atua sobre o eixo girando, I_{EIXO} ou $I_{EIXO+PÊNDULO}$ e α_0 ou α são os momentos de inércia e as acelerações angulares do eixo sem ou com pêndulo, respectivamente.

Uma vez determinados o torque e a aceleração angular para um conjunto de valores de massas cujos pesos fornecem a tração, constrói-se a curva que melhor representa esses valores que é uma reta, como demonstra as eqs. (6) e (7). Logo, através de sua inclinação determina-se o momento de inércia e a interseção desta reta com o eixo vertical fornece o torque associado com a força de atrito.

Seguindo este procedimento determina-se o momento de inércia do pêndulo, primeiro determinando a inércia do eixo (I_{EIXO}) e depois do eixo mais pêndulo ($I_{EIXO+PÊNDULO}$) e então calcula-se a diferença entre eles para encontrar $I_{PÊNDULO}$.

2.3. PARÂMETROS E PROCEDIMENTO

Alguns parâmetros foram previamente fixados como r = (12,53±0,03)10^{-3} m, h = (77,00±0,05)10^{-2} cm, C = (97,9±0,1) nF e V = (4,0±0,1) volts, cujas incertezas associadas foram determinadas por medições através de um paquímetro, uma trena, um medidor LCR e um voltímetro, respectivamente. Na determinação do momento de inércia do eixo (I_{EIXO}) utilizou-se um conjunto de massas entre um valor mínimo de (2,09±0,01) g e um máximo de (7,06±0,01) g, cujas incertezas associadas foram determinadas por medição usando uma balança digital. Enquanto que para determinar o momento de inércia do pêndulo mais eixo (CD+Adaptador+Eixo) utilizou-se um conjunto de massas m que variou de um mínimo de (7,74±0,01) g a um máximo de (77,45±0,01) g. Além das massas de tração, outros parâmetros foram modificados durante a medida, como: X e M_i. Sendo X à distância do centro de massa de M_i ao eixo de rotação e M_i as massas adicionadas ao pêndulo. Estes dois últimos parâmetros podem modificar o valor do momento de inércia do pêndulo. Dois imãs são fixados como mostra a Fig. 1 e suas posições são mantidas para efeitos de se obter uma situação experimental semelhante àquela empregada nas medidas de relaxações. Além dos imãs modificarem o momento de inércia do pêndulo pelo fato de acrescentarem uma massa adicional (não de modo intencional) ao pêndulo de torção, tem uma função importante de serem atraídos por um eletroímã e torcerem a amostra na medição da freqüência de oscilação e atrito interno. Por outro lado, se a posição desses imãs são previamente fixadas, as posições para as massas M_i ficam restritas a um espaço pequeno, pois o comprimento L é (11,00±0,01)10^{-2} m. Considerando as dimensões de M_i, restaram três valores de X que apresentam variações do momento de inércia de maneira significativa, isto é expresso pelas relações a seguir X/L=0,20; 0,46 e 0,88. Utilizaram-se massas adicionais no pêndulo, M_1 = (46,92±0,01) g; M_2 = (72,49±0,01) g; M_3 = (214,09±0,01) g e M_4 = (399,41±0,01) g. Inicialmente, estuda-se como o momento de inércia varia em relação a essas massas, mantendo a posição fixa de seu centro de massa em relação ao eixo de rotação, sendo que X/L é fixado em um dos três valores 0,20; 0,46 ou 0,88. A determinação de $I_{PÊNDULO}$ é a mesma explicada em **2.2.**. A seguir, estuda-se para cada uma dessas massas M_i como varia o momento de inércia quando se varia a relação X/L. Finalmente, utiliza-se a equação:

$$f^* = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi G d^4}{32 l I}} \qquad (8)$$

para se determinar o comportamento de G em função da temperatura T.

3. RESULTADOS

A figura 3 mostra como o momento de inércia varia quando se fixa à relação X/L e se modifica à massa M_i. Portanto, desta forma são estabelecidas curvas de calibração deste pêndulo. Estas curvas foram obtidas pelo método do mínimo quadrado, resultando em equações de reta que melhor representam os resultados experimentais. Através delas é possível determinar o momento de inércia em função da escolha de uma massa M_i para um X/L fixo e também estimá-lo graficamente dentro do intervalo de valores estudados de X/L = 0,88 a X/L = 0,20. Os imãs, apesar de modificarem o momento de inércia do pêndulo por possuírem massas diferentes de zero permanecem inalterados em todas as medidas. Eles são considerados como componentes fixos do pêndulo de torção.

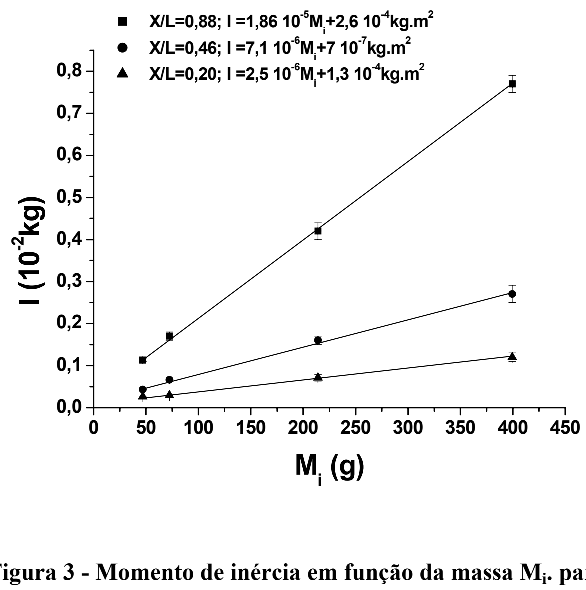

Figura 3 - Momento de inércia em função da massa M_i. para X/L=0,88; 0,46 e 0,20.

A figura 4 mostra como o momento de inércia varia quando se fixa um valor para M_i e se modifica à relação X/L. Portanto é possível estabelecer, de forma semelhante ao comentário anterior, curvas de calibração do pêndulo. Estas equações de reta que melhor representam os resultados experimentais são usadas para determinar ou estimar graficamente o valor do momento de inércia deste pêndulo, para isso se escolhe um valor de X/L. Se M_i for um dos valores M_1 =

(46,92±0,01) g; M_2 = (72,49±0,01) g; M_3 = (214,09±0,01) g ou M_4 = (399,41±0,01) g, utiliza-se diretamente a equação da reta associada à massa M_i e com um valor de X/L obtém-se o momento de inércia. Caso o valor de M_i não seja um daqueles estudados pode-se estimá-lo graficamente no intervalo de massas entre 47 a 400 g.

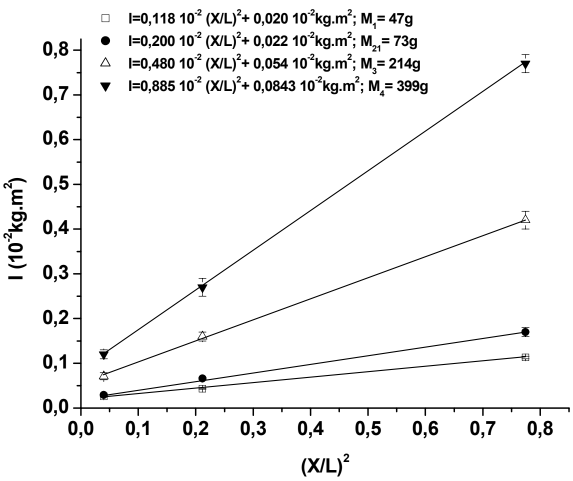

Figura 4 - Momento de inércia em função em função de $(X/L)^2$ para M_i = 47; 73; 214 e 399 g.

A Figura 5 ilustra uma aplicação desses resultados encontrados para uma amostra de uma liga de Ti-6Al-4V [5, 6]. Inicialmente estuda-se como varia a freqüência de oscilação *(f*)* desta amostra em função da Temperatura *(T)* usando um pêndulo de torção [1] com massas M_i igual a zero, M_1 = (46,92±0,01) g; M_2 = (72,49±0,01) g; M_3 = (98,78±0,01) g; M_4 = (214,09±0,01) g e M_5 = (399,41±0,01) g. Em seguida, usando a equação (8), determina-se *G* para cada valor de f^*. Desta forma é possível encontrar o módulo de elasticidade a torção *G* em função da temperatura da amostra. Finalmente com as curvas de *G* em função de *T* determinam-se os valores máximos e mínimos de *G* para *T=300* k. Caso seja conhecido o valor experimental do coeficiente de Poisson υ, da teoria da elasticidade, sabe-se que o módulo de elasticidade a tração *E* é relacionado com *G* através da equação $G = \dfrac{E}{2(1+\upsilon)}$, então é possível avaliar os valores máximos e mínimos de *E* para esta amostra. A Figura 5 mostra estes resultados.

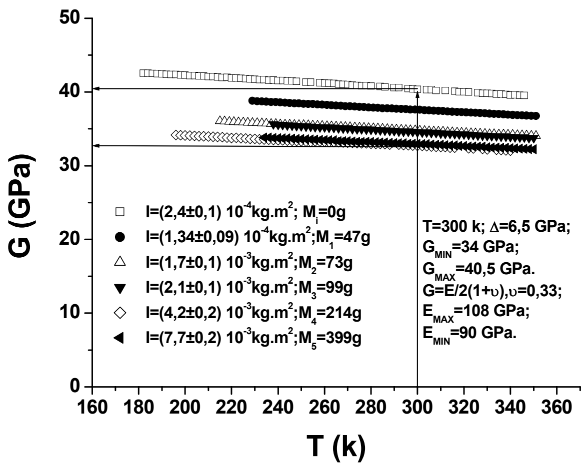

Figura 5 – Valores de *G* em função da temperatura para uma amostra de Ti-6Al-4V.

CONCLUSÃO

Os resultados mostram que é possível através deste estudo obter curvas de calibração para melhor direcionar os experimentos de relaxações anelásticas. Verificou-se também, que através dos valores do momento de inércia do pêndulo é possível determinar o módulo de elasticidade a torção o qual apresentou valores compatíveis com os da literatura [5,6].

AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer as agências de financiamento FAPESP, CNPq e FUNDUNESP pelo suporte financeiro em nossas pesquisas.

REFERÊNCIAS

1. GRANDINI, C.R., *Revista Brasileira de Aplicações de Vácuo* 21 (2004) 13-16.
2. PINTÃO, C.A.F.; SOUZA FILHO, M.P.; GRANDINI, C.R.; HESSEL, R. *European Journal of Physics* 25 (2004) 409-417.
3. PINTÃO, C.A.F.; SOUZA FILHO, M.P.; USIDA, W.F., *Revista Brasileira de Ensino de Física* 27 (2005) 237-243.
4. FLEMING, J.A.; CLINTON, W.C., *Philosophical Magazine* 5 (1903) 493-511.
5. NIINOMI, M., *Materials Science and Engineering A* 243 (1998) 231-236.
6. LONG, M.; RACK, H.J., *Biomaterials* 19 (1998) 1621-1639.