

CÁLCULO DE ALGUMAS CONDUTÂNCIAS DE
GEOMETRIA ESPECIAL NO REGIME MOLECULAR

H. Onusic e L.M.F. Fagundes

Dept^o de Física Nuclear - Instituto de
Física - Universidade de São Paulo
Caixa Postal 20516 - São Paulo - SP

Os critérios de Knudsen são aplicados pa-
ra se calcular condutâncias de geometrias es-
peciais no regime molecular de armadilhas
("traps") e foles metálicos ("bellows"), atra-
vés da utilização de aproximações geométri-
cas via funções matemáticas simples. Os re-
sultados são comparados quando possível com
os já existentes na literatura especializada.

Condutância, fluxo molecular, Knudsen

1. - Introdução

A condutância em regime molecular de dutos de forma geo-
métrica variável pode, em princípio, ser calculada pela
expressão (1),

$$C = \frac{4}{3} K' \bar{v} \left(\int_0^L \frac{P(x)}{S^2(x)} dx \right)^{-1}$$

onde

- S - área da secção transversal do duto
- P - perímetro da secção transversal
- L - comprimento do duto
- \bar{v} - velocidade média aritmética
- K' - fator de correção dependente da geometria

O fator K' envolve, na realidade, o cálculo da probabili-
dade de transmissão através de manipulações matemáticas com-

placadas que em geral foram omitidas nos livros de Tecnologia do Vácuo das últimas décadas (2,3). Entretanto, mesmo com a não inclusão de K' em geometrias mais trabalhosas, consegue-se avaliar as impedâncias das mesmas com uma ordem de grandeza razoável para aplicações em Tecnologia do Vácuo.

A expressão de Knudsen aplicada a um duto de seção circular de diâmetro D_0 e comprimento L fornece o resultado

$$C_0 = F(\bar{v}) \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{D_0^3}{L}$$

onde $F(\bar{v}) = \frac{4}{3} K' \bar{v}$

É nossa intenção aplicar a expressão de Knudsen para dois casos: foles metálicos (bellows) e um trecho de uma armadilha (trap) convencional.

2. - Fole Metálico

A Fig. 1 ilustra o desenho esquemático de um trecho de um fole metálico. Considera-se uma oscilação do diâmetro D_0 , com máxima amplitude $D_0 + 2A$, mínima com $D_0 - 2A$ e genericamente com $D_0 \pm 2y(x)$ onde $y(x)$ é aproximado por uma função matemática conveniente. Cada trecho com amplitude máxima $D_0 + 2A$ é denominado C_+ ; e para $D_0 - 2A$ de C_- , ambas com comprimento L_0 para um comprimento total L do fole metálico.

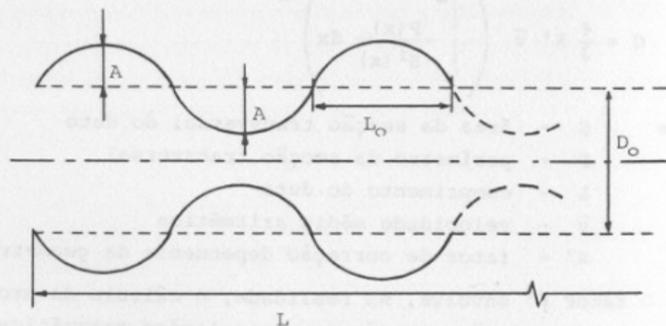


Fig. 1 - Seção longitudinal de um duto do tipo fole metálico.

Aos pares, se tivermos N vezes impedâncias em série do tipo $\frac{1}{C} + \frac{1}{C}$ então $L = N (2L_0)$ para podermos comparar com um duto de diâmetro D_0 de mesmo comprimento. Aproximamos $y(x)$ por três funções: parabólica, senoidal e triangular.

Devemos calcular integrais do tipo

$\int_0^{L_0} \frac{P(x)}{S^2(x)} dx$ e para tanto escrevemos $D = D_0 \pm 2y(x)$ e as integrais se reduzem a

$$\int_0^{L_0} \frac{P(x)}{S^2(x)} dx = \frac{16}{\pi} \int_0^{L_0} \frac{dx}{[(D_0 \pm 2y(x))]^3}$$

Nos casos reais, expandindo o denominador da integral e levando em consideração que $y(x) / D_0 < 1$, fazemos a aproximação

$$[D_0 \pm 2y(x)]^3 \sim D_0^3 \pm 6y(x) D_0^2 = D_0^2 [D_0 \pm 6y(x)]$$

Essa expressão foi utilizada nos cálculos que seguem para as funções parabólica e senoidal. No caso da aproximação triangular, a integral foi calculada diretamente. Os resultados apresentados são válidos para $A/D_0 < 1/6$, e as soluções das integrais podem ser encontradas no "Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas" — Murray R. Spiegel — McGraw (1973).

2.1. - Função parabólica

Nesse caso temos:

$$y(x) = -\frac{4A}{L_0^2} x^2 + \frac{4A}{L_0} x$$

$$\int_0^{L_0} \frac{P(x)}{S^2(x)} dx \sim \frac{16}{\pi} \frac{1}{D_0^2} \int_0^{L_0} \frac{dx}{D_0 \pm 6 \left(-\frac{4A}{L_0^2} x^2 + \frac{4A}{L_0} x \right)}$$

e os cálculos fornecem

$$\frac{C_-}{C_+} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{D_0}{6A} - 1\right)^{1/2}}{\left(1 + \frac{D_0}{6A}\right)^{1/2}} \cdot \frac{\ln \left[\frac{\left(1 + \frac{D_0}{6A}\right)^{1/2} + 1}{\left(1 + \frac{D_0}{6A}\right)^{1/2} - 1} \right]^2}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\left(\frac{D_0}{6A} - 1\right)^{1/2}}}$$

$$\frac{C}{C_0} = \frac{2A}{D_0} \left\{ \frac{1}{6\left(\frac{D_0}{6A} - 1\right)^{1/2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\left(\frac{D_0}{6A} - 1\right)^{1/2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{24\left(1 + \frac{D_0}{6A}\right)^{1/2}} \ln \left[\frac{\left(1 + \frac{D_0}{6A}\right)^{1/2} + 1}{\left(1 + \frac{D_0}{6A}\right)^{1/2} - 1} \right]^2 \right\}^{-1}$$

2.2. - Função senoidal

Nesse caso,

$$y(x) = A \operatorname{sen} \frac{\pi}{L} x$$

$$\int_0^{L_0} \frac{P(x)}{S^2(x)} dx \sim \frac{16}{\pi} \frac{1}{D_0^2} \int_0^{L_0} \frac{dx}{D_0 \pm 6A \operatorname{sen} \frac{\pi}{L} x}$$

e os resultados são:

$$\frac{C_-}{C_+} = \frac{\operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \frac{6A}{D_0}}{1 + \frac{6A}{D_0}} \right)^{1/2}}{\operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \frac{6A}{D_0}}{1 - \frac{6A}{D_0}} \right)^{1/2}}$$

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\left[\left(1 - \frac{6A}{D_0} \right) \left(1 + \frac{6A}{D_0} \right) \right]^{1/2}}{\left[\operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \frac{6A}{D_0}}{1 + \frac{6A}{D_0}} \right)^{1/2} + \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \frac{6A}{D_0}}{1 - \frac{6A}{D_0}} \right)^{1/2} \right]} \cdot \frac{\pi}{2}$$

2.3. - Função triangular

Temos,

$$y(x) = \frac{2A}{L_0} x \quad 0 \leq x \leq \frac{L_0}{2}$$

$$y(x) = 2A - \frac{2A}{L_0} x \quad \frac{L_0}{2} \leq x \leq L_0$$

Assim,

$$\int_0^{L_0} \frac{P(x)}{S^2(x)} dx = 2 \cdot \frac{16}{\pi} \int_0^{L_0/2} \frac{dx}{\left(D_0 \pm \frac{4A}{L_0} x \right)^3}$$

e os resultados são:

$$\frac{C_-}{C_+} = \frac{\left(1 + \frac{A}{D_0}\right) \left(1 - \frac{2A}{D_0}\right)^2}{\left(1 - \frac{A}{D_0}\right) \left(1 + \frac{2A}{D_0}\right)^2}$$

$$\frac{C}{C_0} = 2 \left[\frac{1 + \frac{A}{D_0}}{\left(1 + \frac{2A}{D_0}\right)^2} + \frac{1 - \frac{A}{D_0}}{\left(1 - \frac{2A}{D_0}\right)^2} \right]^{-1}$$

2.4. - Os resultados obtidos estão graficados nas Figs. 2 e 3, em função de A/D_0

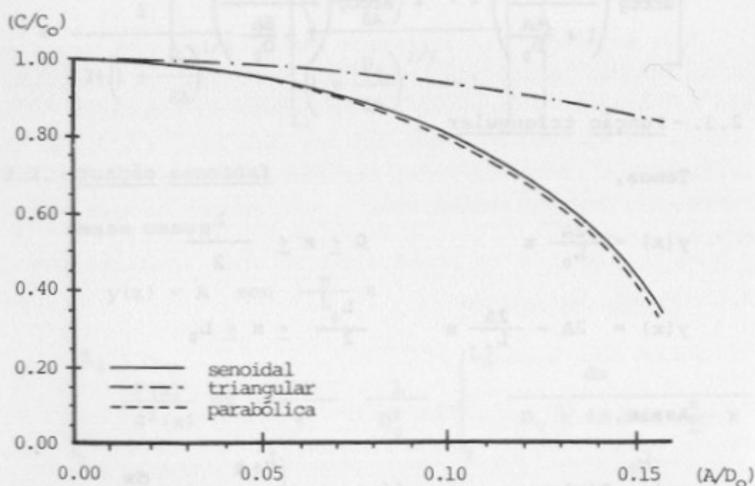


Fig. 2 - Resultados das razões das aproximações do fole metálico por um duto cilíndrico.

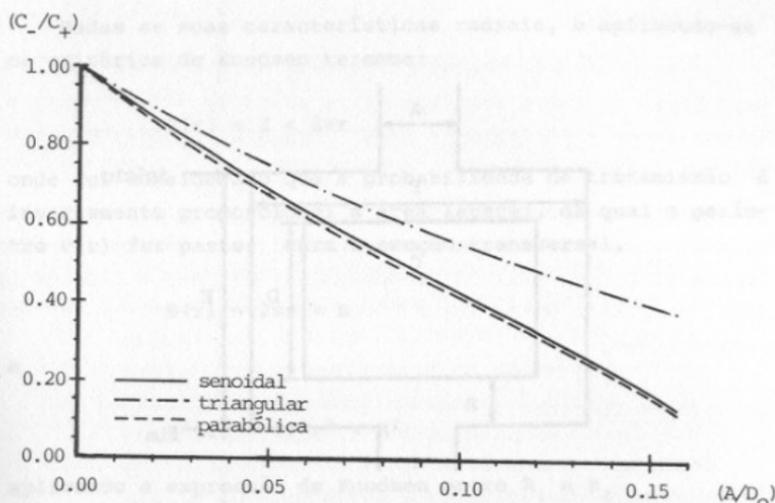


Fig. 3 - Curvas das razões das condutâncias da região de duto de diâmetro menor (C_-) pela de diâmetro maior (C_+).

3. - Armadilha ("trap")

A armadilha em pauta é a da Fig. 4, e o trecho de interesse é o "duto" de comprimento B e diâmetro F. A Fig. 5 ilustra com detalhes esse "duto" em particular, mostrando claramente a característica de "fluxo" radial entre raios R_1 e R_2 .

O cálculo das impedâncias dessa armadilha pode ser efetuado utilizando as expressões da introdução do presente trabalho e das referências (4,5) e pode ainda ser encontrado na referência (6). Entretanto, o trecho abordado é calculado na referência (6) como um duto simples de comprimento B e diâmetro F, como segue:

$$C = F(\bar{v}) \cdot \frac{\pi}{16} \cdot \frac{F^3}{B}$$

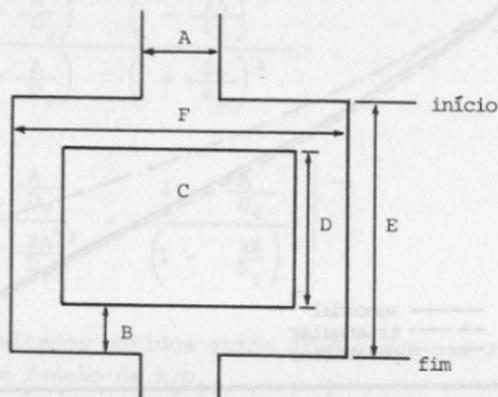


Fig. 4 - Desenho esquemático de uma armadilha convencional (trap).

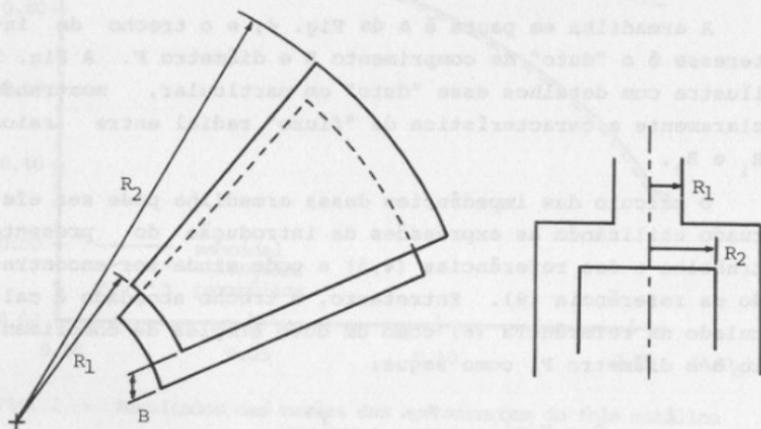


Fig. 5 - Desenho ilustrativo dos parâmetros geométricos da região de fluxo radial da armadilha (trap).

Dadas as suas características radiais, e aplicando-se os critérios de Knudsen teremos:

$$P(r) = 2 \times 2\pi r$$

onde foi considerado que a probabilidade de transmissão é inversamente proporcional à área lateral, da qual o perímetro $P(r)$ faz parte. Para a secção transversal,

$$S(r) = 2\pi r \times B$$

e

$$S^2(r) = 4\pi^2 r^2 \times B^2$$

aplicando a expressão de Knudsen entre R_1 e R_2

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{P(r)}{S^2(r)} dr = \frac{1}{\pi B^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{\pi B^2} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

e finalmente,

$$C = F(\bar{v}) \frac{\pi B^2}{\ln(R_2/R_1)}$$

3.1. - Aplicando o caso acima para um caso real, onde:

$A = 10$ cm, $B = 4$ cm, $C = 14$ cm, $F = 20$ cm e para N_2 a $T \sim 20^\circ\text{C}$, pela referência (6) $C \cong 12 \cdot \frac{20^3}{4} \sim 24000 \text{ l/s}$ e pela nossa aproximação, estimando $R_1 = 5$ cm e $R_2 = 7$ cm, $C \sim 9000 \text{ l/s}$

Percentualmente encontramos uma diferença de mais de 50%. Dependendo da razão R_2/R_1 , essa diferença pode aumentar consideravelmente.

4. - Conclusões

No caso do fole metálico, para aproximações senoidal e parabólica (maiores restrições), a perda de condutância só começa a ser significativa (~20%) para $A/D_0 > 0,10$, representada principalmente por C_- a partir de $A/D_0 > 0,03$.

Para o trecho da armadilha considerada, a diferença de critérios acarretou em um exemplo real um acréscimo de impedância maior que 50%. A impedância total, nesse tipo de armadilha, cresce entre 10% a 20%, dependendo das dimensões consideradas.

5. - Agradecimentos

Somos gratos aos Srs. P.L. Ferrador e P.S.R.C. Luiz pela construção dos gráficos e desenhos.

6. - Bibliografia

1. A. Roth, "Vacuum Technology", North Holland (1976), p. 86.
2. L. Holland, W. Steckelmacher e J. Yarwood (eds), "Vacuum Manual", SPON, (1974), p. 29.
3. W. Steckelmacher, J. Vac. Sci. Technol. 18 (1981)54.
4. H. Onusic, J. Vac. Sci. Technol. 17 (1980) 661.
5. H. Onusic e L.M.F. Fagundes, Rev. Brasil. Apl. Vac., 1(1981)5.
6. A. Guthrie, "Vacuum Technology", Wiley, (1965), p. 512.